Intégration d'une fonction continue sur un segment :

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b deux éléments de I. Le nombre réel $F(b)-F(a)$ est appelé l'intégrale de a à b de la fonction f et se note : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$.

Remarque :

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, On peut remplacer la variable x par n'importe quelle autre.

(On dit que x est une variable muette), c'est-à-dire : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta = ...$

Propriété :

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;; $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Relation de chasles – linéarité de l'intégrale :

Relation de chasles :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,c]$, et $b \in [a,c]$.

On a : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Linéarité :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$, et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

On a : $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ *Et* $\int_a^b \alpha \times f(x)dx = \alpha \times \int_a^b f(x)dx$

$\int_a^b [\alpha.f(x)+\beta.g(x)]dx = \alpha.\int_a^b f(x)dx + \beta.\int_a^b g(x)dx$.

Intégration par Parties :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' sont continues sur un intervalle I. Soit a et b deux éléments de I.

On a : $\int_a^b u'(x)\times v(x)dx = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\times v'(x)dx$.

Cette formule est appelée formule de l'intégration par parties.

Exemple :

En utilisant une intégration par parties ; Calculer $I = \int_1^e x\times\ln(x)dx$.

Pour déterminer la fonction primitive et la fonction dérivée en utilise la méthode suivante :

A L P E S C

A → Arctan, L → ln, P → Polynôme, E → Exp, S → Sin, C → Cos

La première fonction dans ALPESC est une fonction primitive et la deuxième est une fonction dérivé.

Donc : On pose : $\begin{cases} u(x)=\ln x \\ v'(x)=x \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v(x)=\dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$

U et v sont dérivable sur $[1;e]$, et u' et v' sont continues sur l'intervalle $[1;e]$, d'après la propriété de l'intégration par parties on a :

$$I=\int_1^e x\times\ln(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\times\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\times\ln x\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx$$

$$I=\left[\frac{1}{2}x^2\times\ln x\right]_1^e-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e=\left[\frac{1}{2}x^2\times\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^e=\left(\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{e^2}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^2+1}{4}$$

Donc : $I=\dfrac{e^2+1}{4}$.

Valeur moyenne :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a et b deux éléments de I tels que $a\prec b$.

- Le nombre réel $m=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est appelé la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.
- Il existe un réel c appartenant à $[a,b]$ tel que : $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Calcul d'aires :

Propriété 1 :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a,b]$. Soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- L'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=a$ et $x=b$. Est le nombre réel $S=\left(\int_a^b|f(x)|dx\right)u.a$.

Propriété 2 :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$. Et $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont les courbe représentatives de f et g dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- L'aire de la partie du plan délimitée par les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$, et les droites d'équations : $x=a$ et $x=b$. Est le nombre réel $S=\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|dx\right)u.a$.

Calcul des volumes :

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.

- Le volume de solide de révolution engendré par la rotation de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ autour de l'axe des abscisses : Est $V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2dx\right]u.v$.

u.a : est l'unité d'aire ($u.a=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$) et u.v : est l'unité de volume ($u.v=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\times\|\vec{k}\|$).